МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 539.3 https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-3-208-213

Задача о бесконечной пластине, нагруженной нормальной силой, движущейся по сложной траектории[*]

А. В. Галабурдин[1**]
[1] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

The problem of infinite plate loaded with normal force following a complex trajectory[***]

A. V. Galaburdin[1**]
[1] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Введение. Предлагается метод решения задачи о бесконечной пластине, лежащей на упругом основании. На пластину действует периодическая нагрузка в виде силы, перемещающейся по произвольной замкнутой траектории. Цель исследования — разработка численного метода решения задач теории упругости для тел, находящихся под действием подвижной нагрузки.
Материалы и методы. Учитывая периодичность рассматриваемой нагрузки, она раскладывается в ряд Фурье на временном отрезке, длина которого равна периоду нагрузки. Решение исходной задачи строится посредством суперпозиции решений задач, соответствующих нагрузке, задаваемой слагаемыми описанного выше ряда Фурье. Окончательное решение задачи представляется в виде отрезка ряда. Каждое слагаемое при этом соответствует решению задачи о воздействии на бесконечную пластину нагрузки, распределенной по замкнутой кривой (траектории движения силы). Для нахождения этих решений используется фундаментальное решение уравнения колебания бесконечной пластины, лежащей на упругом основании.
Результаты исследования. Предложен новый метод решения задач теории упругости для тел с нагрузкой, движущейся по замкнутой траектории произвольной формы. Решена задача о бесконечной плоскости, по которой с постоянной скоростью движется сосредоточенная сила. Определено, что траектория движения представляет собой гладкую замкнутую кривую, состоящую из дуг окружностей. Рассмотрен характер изменения перемещений и напряжений вблизи движущейся силы. Изучено распространение энергии упругих волн. С этой целью выполнено вычисление координат вектора Умова — Пойнтинга. Исследовано влияние скорости движения силы на длину вектора Умова — Пойнтинга.
Обсуждение и заключения. Метод применим и при рассмотрении более сложных объектов (плиты сложной формы, слоистые плиты, вязкоупругие плиты). Его преимущество — экономичность, так как для построения решения используются уже известные решения задач. Окончательное решение выражается в удобном виде — как сумма криволинейных интегралов. Полученные результаты могут быть ис-

Introduction. A method for solving the problem of an infinite plate on an elastic foundation is proposed. The plate is affected by a periodic load in the form of a force following an arbitrary closed path. The work objective is to develop a numerical method for solving problems of the elasticity theory for bodies under a moving load.
Materials and Methods. Given the periodicity of the load under consideration, it is decomposed in a Fourier series in a time interval whose length is equal to the load period. The solution to the original problem is constructed by superposition of the solutions to the problems corresponding to the load specified by the terms of the Fourier series described above. The final solution to the problem is presented as a segment of a series. In this case, each term corresponds to the solution of the problem of the impact on an infinite plate of a load distributed along a closed curve (the trajectory of the force motion). To find these solutions, the fundamental solution to the equation of vibration of an infinite plate lying on an elastic base is used.
Research Results. A new method is proposed for solving problems on the elasticity theory for bodies with a load following a closed path of arbitrary shape. The problem of an infinite plane along which a concentrated force moves at a constant speed is solved. It is determined that the trajectory of motion is a smooth closed curve consisting of circular arcs. The behavior of displacements and stresses near a moving force is considered. The energy propagation of the elastic waves is studied. For this purpose, the coordinates of the Umov – Poynting vector are calculated. The effect of the force motion speed on the length of the Umov – Poynting vector is investigated.
Discussion and Conclusions. The method is applicable when considering more complex objects (plates of complex shape, layered plates, viscoelastic plates). Its advantage is profitability since the known problem solutions are used to build the solution. The final decision is expressed in a convenient form – as



[*] Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
[**] E-mail: Galaburdin@mail.ru
[***] The research is done within the frame of the independent R&D.

пользованы в процессе проектирования дорог. Изучение распространения энергии упругих волн от движущихся транспортных средств позволит оценить воздействие указанных волн на строения, расположенные вблизи дороги. С учетом данных о характере изменения перемещений и напряжений оценивается износ дорожного покрытия.

the sum of curvilinear integrals. The results obtained can be used in the road design process. Studying the energy propagation of elastic waves from moving vehicles will enable to evaluate the impact of these waves on buildings near the road. The wear of the pavement is estimated considering data on the behavior of displacements and stresses.

Ключевые слова: бесконечная пластина, движущаяся нагрузка, произвольная замкнутая траектория, энергия упругих волн.

Keywords: infinite plate, moving force, arbitrary closed path, energy of elastic waves

Образец для цитирования: Галабурдин, А. В. Задача о бесконечной пластине, нагруженной нормальной силой, движущейся по сложной траектории / А. В. Галабурдин // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2019. — Т. 19, № 3. — С. 208−213. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-3-208-213

For citation: A.V. Galaburdin. The problem of infinite plate loaded with normal force following a complex trajectory. Vestnik of DSTU, 2019, vol. 19, no. 3, pp. 208−213. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-3-208-213

Введение. Исследование динамических явлений, обусловленных действием подвижной нагрузки, представляет собой актуальную задачу, имеющую прикладное значение (например, при решении вопросов развития транспорта). В работах, посвященных указанной проблеме, рассматривались различные задачи с подвижной нагрузкой. В частности, показано, как на полуплоскость или полупространство (упругое изотропное, трансверсальное изотропное, вязкоупругое) действует нагрузка, движущаяся по бесконечной прямой линии с постоянной скоростью. В этом случае при решении задачи вводится подвижная система координат, связанная с движущейся силой, что позволяет исключить время из числа независимых переменных [1–5]. Часть работ посвящена изучению действия на бесконечную пластину или полосу (упругую или вязкоупругую) равномерно движущейся по прямолинейной траектории нагрузки. При этом используется тот же метод исключения временной переменной или рассматривается квазистатическая постановка задачи [6–12]. Наибольший интерес представляют задачи, в которых длина траектории движения нагрузки конечна, а сама траектория представляет собой кривую линию. Часто этом случае используется конечноэлементное моделирование движущейся нагрузки [11–13]. В ряде работ при решении подобных задач используются вариационные методы (в частности метод Рэлея — Ритца) [14–16] или разновидность метода Галеркина, позволяющая сводить задачу к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При этом рассматриваются разнообразные объекты приложения подвижной нагрузки (плиты, слоистые плиты, вязкоупругие плиты, полупространства — как изотропные, так и анизотропные) [17–19]. В данной статье представлен метод, который развивает идеи, изложенные в работах [20–23].

Материалы и методы. Рассмотрим бесконечную пластину, лежащую на упругом винклеровском основании, которая находится под действием нормально приложенной силы, перемещающейся по замкнутой траектории.

Задача сводится к интегрированию уравнения движения пластины, лежащей на упругом винклеровском основании [14]:

$$\Delta^2 W + c^{-2}\partial_t^2 W + kW = \frac{P}{D}, \qquad (1)$$

где W — прогиб пластины; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластины; $c^{-2} = \frac{\rho h}{D}$; ρ — плотность материала; $k = \frac{K}{D}$; K — коэффициент податливости упругого основания; P — сосредоточенная сила, движущаяся по замкнутой кривой γ с постоянной скоростью a.

Введем координату s, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки кривой γ. Тогда сила P, движущаяся вдоль кривой γ со скоростью a, будет описываться соотношением $P = P(s-at)$. Функция $P(s-at)$ периодическая по t, с периодом $T = \frac{L}{a}$, где L — длина кривой γ.

Решение. Рассмотрим установившийся режим. Разложим функцию $P(s-at)$ в ряд Фурье по переменной t на отрезке $\left[-\frac{L}{2a};\frac{L}{2a}\right]$. В этом случае коэффициенты разложения предстанут виде:

$$c_k = \int_{-L/2a}^{L/2a} P(s-at)e^{2iak\pi t/L}dt .$$

Сделав замену переменной интегрирования в интеграле $s-at=z$, получим:

$$c_k = \int_{-L/2}^{L/2} P(z)e^{-2ik\pi z/L}dz\frac{e^{2ik\pi s/L}}{a} = d_{-k}\frac{e^{2ik\pi s/L}}{a} ,$$

где d_k — коэффициенты разложения в ряд Фурье на отрезке $\left[-\frac{L}{2};\frac{L}{2}\right]$ функции $P(z)$.

Тогда подвижную нагрузку можно представить в виде ряда Фурье:

$$P(s-at) = \frac{1}{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{-k}e^{2ik\pi(s-at)/L} .$$

Учитывая линейность задачи, ее решение можно представить в виде:

$$W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{-k}\hat{W}_k , \qquad (2)$$

где $\hat{W}_k$ — прогибы пластины, обусловленные действием вертикальной нагрузки, распределение которой вдоль кривой γ описывается функцией $e^{2ik\pi s/L}$, изменяющейся во времени по закону $e^{-2ika\pi t/L}$.

Для определения $\hat{W}_k$ воспользуемся фундаментальным решением уравнения (1), которое соответствует $P=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)e^{-i\omega k t}$, где $\omega_k = \frac{2ika\pi}{L}$.

Используя принцип предельного поглощения и традиционные методы построения решений дифференциальных уравнений, можно получить фундаментальное решение уравнения (1), которое при $k > \frac{\omega_к^2}{c^2}$ имеет вид:

$$w_k(x,y,x_0,y_0) = \frac{i}{4\pi\varepsilon^2 D}\left[K_0(\alpha_1 R) - K_0(\alpha_2 R)\right],$$

где $R = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]^{1/2}$, $\varepsilon = \sqrt[4]{k - \omega_k^2/c^2}$, $\alpha_1 = \varepsilon e^{i\pi/4}$, $\alpha_1 = \varepsilon e^{-i\pi/4}$, $K_0(z)$ — функция Макдональда.

При $k < \frac{\omega_k^2}{c^2}$ решение имеет вид:

$$w_k(x,y,x_0,y_0) = \frac{i}{4\pi\gamma^2 D}\left[\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(\gamma R) - K_0(\gamma R)\right],$$

где $\gamma = \sqrt[4]{\frac{\omega_k^2}{c^2} - k}$, $H_0^{(1)}(\gamma R)$ — функция Ганкеля.

Тогда $\hat{W}_k = \oint_\gamma w_k(x,y,x_0(s),y_0(s))e^{2ik\pi(s-at)/L}ds$. Используя известные формулы теории тонких пластин и полученную по приведенным выше соотношениям формулу, определяющую прогиб W (2), можно вычислить перемещения u_x, u_y и напряжения σ_x, σ_y и σ_{xy} в любой точке пластины.

При больших k приходится вычислять интеграл от быстро осциллирующих функций. Для этого использовалась квадратурная формула, основанная на замене кубическим сплайном слабо осциллирующей части подынтегральной функции, а сильно осциллирующий множитель $e^{2ik\pi s/L}$ рассматривался как весовая функция [15].

Результаты исследования. Итак, бесконечная пластина лежит на упругом винклеровском основании. На нее действует нормальная сила, перемещающаяся по траектории, изображенной на рис 1.

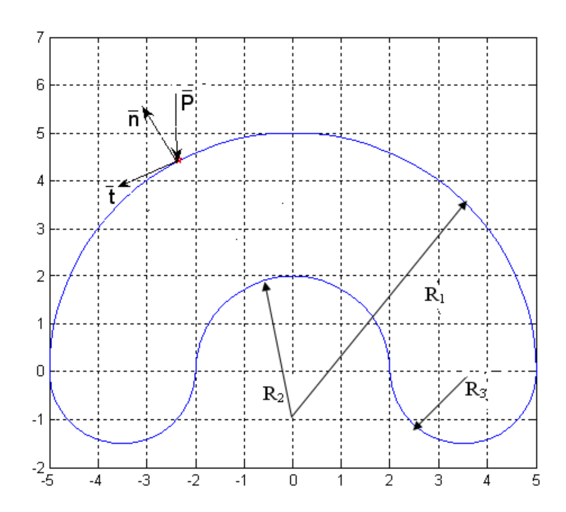


Рис. 1. Траектория движения нагрузки

Расчеты проводились при следующих исходных данных: $h = 0{,}25$ м; $c = 221$ м/с; $E = 232469 \cdot 10$ H/м^2; $\nu = 0{,}36$. На рис. 2 приведены результаты расчетов, соответствующие $K = 1{,}864$ м$^{-4}$ и $a = 125$м/с.

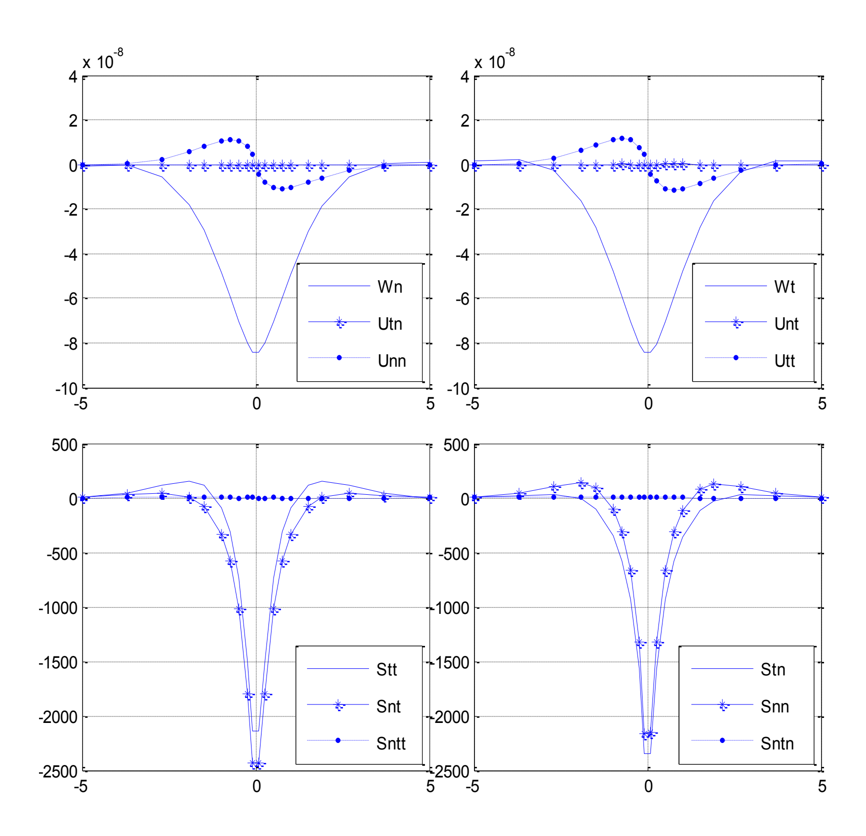


Рис. 2. Изменение перемещений и напряжений

Данные графики описывают изменения перемещений и напряжений в системе координат, связанной с точкой приложения движущейся силы P. Ось t направлена по касательной к траектории движения $\bar{t}$, а ось n — по внешней нормали к области, ограниченной траекторией $\bar{n}$ (см. рис. 1) при $z = h/2$.

При этом вектор перемещений и тензор напряжений соответственно представлялись в виде

$$\bar{U} = Ut \cdot \bar{t} + Un \cdot \bar{n} + W \cdot \bar{k}\ ,\ \bar{\bar{S}} = St \cdot \overline{tt} + Sn \cdot \overline{nn} + Stn \cdot \left(\overline{tn} + \overline{nt} \right),$$

где $\bar{k}$ — нормаль к пластине.

На рис. 2 показано изменение вдоль оси t компонент вектора перемещений Wt, Utt, Unt , тензора напряжений $Stt, Snt, Stnt$ и изменение этих величин вдоль оси n — Wn, Utn, Unn и $Stn, Snn, Stnn$.

Согласно расчетам, характер поведения указанных величин во всех точках траектории остается неизменным. Расчеты показали также, что при изменении скорости движения нагрузки a в пределах от 0 до 125 м/с компоненты вектора перемещений и тензора напряжений возрастали незначительно (на 3–4%).

Для изучения распространения энергии упругих волн вычислялись компоненты вектора Умова − Пойтинга $e_i = -S_{ij} \cdot \partial_t u_i$ (S_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_i — координаты вектора перемещений), направление которого указывает направление распространения энергии, а длина описывает количество энергии, переносимое через единицу поверхности, перпендикулярной к направлению данного вектора в единицу времени.

На рис. 3. представлено распространение энергии упругих волн около движущейся сосредоточенной силы (положение силы обозначено красной звездочкой).

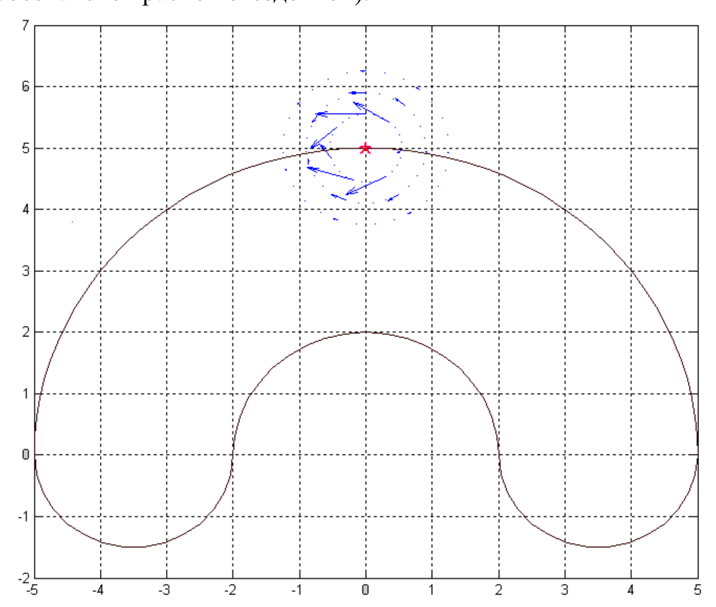


Рис. 3. Распространение энергии упругих волн

Обсуждение и заключения. Анализ полученных результатов показывает, что при указанных выше пределах изменения скорости длина вектора Умова − Пойтинга практически пропорциональна скорости движения нагрузки и качественная картина распространения энергии вблизи силы слабо изменяется в процессе движения. Характер поведения рассчитанных выше перемещений и напряжений во всех точках траектории остается неизменным, а их значения слабо зависят от скорости движения нагрузки a при изменении этой скорости в пределах от 0 до 125 м/с.

Применение предложенного метода к бесконечной пластине, лежащей на упругом основании, не исчерпывает его возможности. Он может быть использован при рассмотрении более сложных объектов (плиты сложной формы, слоистые плиты, вязкоупругие плиты). Рассмотренный метод отличается от упомянутых выше большей экономичностью, так как использует для построения решения уже известные решения задач. Окончательное решение выражается в удобном виде — как сумма криволинейных интегралов.

Полученные результаты могут быть использованы в процессе проектирования дорог. Изучение распространения энергии упругих волн от движущихся транспортных средств позволит оценить воздействие указанных волн на строения, расположенные вблизи дороги. С учетом данных о характере изменения перемещений и напряжений оценивается износ дорожного покрытия.

Библиографический список

1. Александров, В. М. Движение с постоянной скоростью жесткого штампа по границе вязкоупругой полуплоскости / В. М. Александров, А. В. Марк // Трение и износ. — 2006. — Т. 27, № 1. — С. 5–11.

2. Ege, N. Response of a 3D elastic half-space to a distributed moving load / N. Ege, O. Sahin, B. Erbas // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. — 2017. — Vol. 46 (5). — C. 817–828. DOI: 10.15672 /HJMS.2017.434.

3. On a 3D moving load problem for an elastic half space / J. Kaplunov [et al.] // Wave Motion. — 2013. — Vol. 50. — C. 1229–1238. DOI:10.1016/j.wavemoti.2012.12.008.

4. Динамика слоистого полупространства под действием движущейся и осциллирующей нагрузки / В. В. Калинчук [и др.] // Вестник Юж. науч. центра РАН. — 2005. — Т. 1, № 1. — С. 3–11.

5. Приказчиков, Д. А. Околорезонансные режимы в стационарной задаче о подвижной нагрузке в случае трансверсально изотропной упругой полуплоскости / Д. А. Приказчиков // Известия Саратов. ун-та. — 2015. — Т. 15. — С. 215–221.

6. Chen, Y. Dynamic response of an elastic plate on a cross-anisotropic poroelastic halfplane to a load moving on its surface / Y. Chen, N. D. Beskou, J. Qian // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. — 2018. — Vol. 107. — C. 292–302.

7. Beskou, N. D. Dynamic response of an elastic plate on a cross-anisotropic elastic half-plane to a load moving on its surface / N. D. Beskou, Y. Chen, J. Qian // Transportation Geotechnics. — 2018. — Vol. 14. — C. 98–106.

8. Облакова, Т. В. О резонансном режиме в нестационарной задаче о подвижной нагрузке для упругого полупространства / Т. В. Облакова, Д. А. Приказчиков // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — Т. 9. — С. 1–8.

9. Kaplunov, J. The edge wave on an elastically supported Kirchhoff plate / J. Kaplunov [et al.] // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 136, № 4. — С. 1487–1490. DOI: 10.1121/1.4894795.

10. Глухов, Ю. П. Динамическая задача для двухслойной полосы на жестком основании / Ю. П. Глухов // Труды Одесского политехнического университета. — 2014. — Вып. 2. — С. 9–14.

11. Егорычев, О. О. Воздействие подвижной нагрузки на многослойную вязкоупругую пластину, лежащую на вязкоупругом основании / О. О. Егорычев // Вестник МГСУ. — 2007. — Вып. 1. — С. 39–42.

12. Досжанов, М. Ж. Динамическое поведение безграничной упругой пластинки при воздействии подвижной (бегущей) нагрузки / М. Ж. Досжанов [и др.] // Путь науки. — 2016. — Т. 1, № 11 (33). — С. 26–28.

13. Шишмарев, К. А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки / К. А. Шишмарев // Известия Алтай. гос. ун-та. — 2015 — № 1/2 (85). — С. 189–194.
DOI 10.14258/izvasu(2015) 1.2–35.

14. Dyniewicz, B. Vibrations of a Mindlin plate subjected to a pair of inertial loads moving in opposite directions / B. Dyniewicz, D. Pisarski, C. Bajer // Journal of Sound and Vibration. — 2017. — Vol. 386. — C. 265–282.

15. Esen, I. A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass / I. Esen // Finite Elements in Analysis and Design. — 2013. — Vol. 66. — C. 26–35.

16. Song, Q. Vibration analysis of functionally graded plate with a moving mass / Q. Song, J. Shi, Z. Liu // Applied Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 46. — C. 141–160.

17. Parametric study of dynamic response of sandwich plate under moving loads / Q. Song [et al.] // Thin-Walled Structures. — 2018. — Vol. 123. — C. 82–99.

18. Time-domain structural-acoustic analysis of composite plates subjected to moving dynamic loads / Y. Qu [et al.] // Composite Structures. — 2019. — Vol. 208. — C. 574–584.

19. Foyouzat, M. A. An analytical-numerical solution to assess the dynamic response of viscoelastic plates to a moving mass / M. A. Foyouzat, H. E. Estekanchi, M. Mofid // Applied Mathematical Modelling. — 2018. — Vol. 54. — C. 670–696.

20. Галабурдин, А. В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению связных задач термоупругости с подвижной нагрузкой / А. В. Галабурдин // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2012. — № 4. — С. 29–31.

21. Галабурдин, А. В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке / А. В. Галабурдин // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2015. — № 1. — С. 9–11.

22. Рекач, В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости / В. Г. Рекач. — Москва : Высшая школа, 1973. — 384 с.

23. Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функции / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, А. Л. Мирошниченко. — Москва : Наука, 1980. — 352 с.

Сдана в редакцию 25.02.2019
Принята к публикации 05.04.2019

Об авторе:

Галабурдин Александр Васильевич,
доцент кафедры «Математика и информатика» Донского государственного технического университета (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат физико-математических наук, доцент
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0411-6724
Galaburdin@mail.ru